

Asociación Argentina  
de Mecánica Computacional



Mecánica Computacional Vol XXXV, págs. 755-770 (artículo completo)  
Martín I. Idiart, Ana E. Scarabino y Mario A. Storti (Eds.)  
La Plata, 7-10 Noviembre 2017

## APLICACIÓN DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL COMO COMPLEMENTO DE ENSEÑANZA EN LA UNIVERSIDAD: ESTUDIO DE FLUJOS COMPRESIBLES

Rodrigo Rolny<sup>a</sup>, Francisco Mancuso<sup>a</sup> y Miguel Coussirat<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Grupo LAMA- Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Mendoza, Rodríguez 273, 5500  
Mendoza, Argentina, [miguel.caoussirat@frm.utn.edu.ar](mailto:miguel.caoussirat@frm.utn.edu.ar)

**Palabras Clave:** flujo compresible, toberas, enseñanza, métodos numéricos, CFD.

**Resumen.** El grado de madurez alcanzado por la Mecánica de Fluidos Computacional, o Computational Fluid Dynamic por sus siglas en inglés (CFD), hace que sea una herramienta cada vez más utilizada en el diseño por los ingenieros. Luego, su incorporación como herramienta de trabajo es cada vez más importante y necesaria en los planes de enseñanza dentro de las carreras de grado en el ámbito de la ingeniería. El presente trabajo, tiene como finalidad el ir incorporando el uso de CFD para mejorar el dictado de la Cátedra de Mecánica de los Fluidos y Máquinas Fluidodinámicas dentro de la carrera de Ingeniería Electromecánica de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Mendoza (UTN/FRM). El objetivo de este trabajo es aplicar la CFD a la resolución y visualización de flujos compresibles en toberas convergentes y convergentes-divergentes, obteniéndose curvas para la variación de la presión y el caudal másico dentro de la tobera. Se muestra también el patrón de flujo en su interior, el fenómeno de bloqueo del flujo y la onda de choque normal que aparece, a medida que se cambian las condiciones de operación de la tobera. Mediante la comparación de resultados obtenidos mediante las expresiones analíticas desarrolladas durante el dictado de la Asignatura y las soluciones CFD para el fenómeno de bloqueo, el campo de presiones y el número de Mach, se consigue que los desarrollos teóricos relacionados con estos temas tengan su contraparte computacional permitiendo al estudiante valorar las posibilidades que la CFD ofrece. Como conclusión se muestra que la CFD es muy útil para mostrar a los estudiantes fenomenología relacionada con flujos complejos y que les permita una mejor comprensión de los fenómenos estudiados. La posibilidad de su uso como herramienta para el análisis de la compleja fenomenología que presenta este tipo de flujos, posibilitando representaciones visuales de detalle del flujo, son de gran interés y motivantes para el estudiante, y más teniendo en cuenta el elevado costo que estas representaciones tendrían si se hicieran mediante técnicas experimentales, técnicas que muchas veces no están al alcance de los actuales presupuestos destinados a la educación superior.

## 1 INTRODUCCIÓN

El grado de madurez alcanzado por la Mecánica de Fluidos Computacional, o Computational Fluid Dynamic por sus siglas en inglés (CFD), hace que sea una herramienta cada vez más utilizada en el diseño por los ingenieros. Luego, su incorporación como herramienta de trabajo es cada vez más importante y necesaria en los planes de enseñanza dentro de las carreras de grado en el ámbito de la ingeniería. La utilización de la CFD como complemento de los estudios de grado en la UTN/FRM, es de gran ayuda para formar recursos humanos altamente especializados que posean la capacidad de utilizar herramientas de última generación para resolver problemas de ingeniería complejos.

Desde hace un tiempo un grupo de docentes de la Carrera Electromecánica (Grupos de *I+D+i* LAMA y DIDEME) de la UTN/FRM vienen trabajando en el desarrollo de un plan que permita la introducción de herramientas numéricas dentro de los cursos de grado, ya que con el acortamiento del tiempo de cursado y la reformulación de los planes de la Carrera se ha perdido mucho del conocimiento necesario para la adecuada operación de estos paquetes de programas de última generación.

Se pretende que el estudiante tenga un acceso al uso de estos programas que le permitan una adecuada operación e interpretación de resultados desde un punto de vista algo diferente al método tradicional, el que implicaría el estudio de asignaturas relacionadas a los Métodos Numéricos, Programación y la Mecánica de los Medios Continuos, asignaturas que no se dictan dentro de la carrera.

Se busca además que estos nuevos conocimientos adquiridos ayuden a la motivación de los estudiantes que pretendan una formación más específica en estas nuevas tecnologías, fomentando una mejor formación en este ámbito específico de la ingeniería. Se pretende también incrementar su participación en el abordaje de trabajos relacionados con proyectos desarrollados por los Grupos de *I+D+i* que permitan su formación como futuros investigadores y docentes de la UTN/FRM en los Grupos de trabajo ya mencionados que existen en la Carrera de Ingeniería Electromecánica.

Teniendo en cuenta este contexto, es que se han definido estrategias específicas para cumplir con el objetivo de una formación más acorde a los requerimientos actuales en el ámbito de la ciencia de la Mecánica de Fluidos. Dentro de las estrategias definidas, se cree que una buena metodología para introducir al alumno en la especialidad CFD, que implica la aplicación de esta herramienta en problemas de ingeniería complejos, es la de complementar la formación teórica de grado con aplicaciones sencillas CFD que permitan profundizar aspectos teóricos y visualizar aplicaciones más "atractivas" para el estudiante mediante programas de CFD. Se pretende que estas herramientas sean usadas como una "caja gris", esto es, debe tratarse de que el estudiante vincule conocimientos básicos de la Mecánica de Fluidos, con los contenidos intrínsecos que poseen los manuales de usuario de estos programas de CFD, sin centrarse en los aspectos relacionados con las técnicas numéricas utilizadas.

La búsqueda de este equilibrio entre la formación teórico/práctica "clásica" e "innovación en la resolución de problemas" se hará seleccionando casos considerados como "clásicos" en la Mecánica de Fluidos, que permitan: 1) la fácil comprensión del problema, para vincular los aspectos teóricos y prácticos mediante la herramienta CFD en asignaturas de grado relacionadas con esta temática, y 2) que muestren las posibilidades de la CFD en su resolución, ya que lo arduo del cálculo al aplicar las ecuaciones que gobiernan el fenómeno para obtener una solución del tipo analítica, comúnmente denominada "solución de manual", imposibilitan la visualización de soluciones más complejas que las "unidimensionales".

En trabajos anteriores (e.g. [Stramana et al., 2014](#), y en [Lopez et al., 2016](#)) ya se abordó la resolución de casos del tipo "de fácil comprensión" por parte del estudiante, para así

incentivarlo en el aprendizaje y uso de estas herramientas numéricas. Se realizan aplicaciones de CFD que permitan ser comparadas contra soluciones teóricas simples del tipo “soluciones de manual”, o bien contra los resultados obtenidos en ensayos experimentales que se realizan en el laboratorio de la UTN/FRM durante el cursado de la Cátedra Mecánica de Fluidos y Máquinas Fluidodinámicas, (MFMF). El objetivo de estos trabajos fue mostrar visualizaciones del flujo en el caso de flujo interno (tuberías rectas y accesorios) y flujo externo (capa límite en placas planas) una vez validados y contrastados los resultados CFD obtenidos contra las soluciones analíticas o datos experimentales ya obtenidos previamente. Estas visualizaciones sirven para complementar la formación teórica/práctica del alumno.

En el presente trabajo se sigue con esta línea del desarrollo de módulos complementarios de apoyo a la Cátedra MFMF, relacionados con su temario. Como ya se indicó, los temas anteriores estaban relacionados con problemas de flujo incompresible interno y externo. Se abordan ahora, problemas relacionados con el tema “Flujos Compresibles”, que implica un cierto grado de dificultad en su comprensión, ya que los fluidos bajo la condición de compresibilidad no se comportan intuitivamente. Además de lo dicho anteriormente, la solución teórica que se obtiene, del tipo “soluciones de manual” es, más compleja de abordar, ya que los efectos de compresibilidad del gas añaden dificultades en el desarrollo del marco teórico, y no permite una visualización clara del patrón del flujo para el caso de toberas. Además, esta solución teórica básica que está dentro de los objetivos de la asignatura MFMF no tiene en cuenta los efectos viscosos, lo que limita el tratamiento del flujo como 1D conduciendo a la “soluciones de manual” que se conoce como “onda de choque normal”.

## 2 OBJETIVOS

Mediante este trabajo, se pretende satisfacer el creciente interés existente en incorporar esta herramienta (CFD) en la Cátedra MFMF de la UTN/FRM, intentando incentivar su uso para contribuir a completar la formación del estudiante en los temas tratados mientras no exista una asignatura específica que permita estas aplicaciones de una manera integral. Cabe destacar que este trabajo forma parte de un proyecto de mejora de la enseñanza universitaria financiado por la UTN, denominado "Potenciación del uso de herramientas numéricas en la enseñanza de la ingeniería", UTI3543TC, actualmente en desarrollo.

Específicamente, en este trabajo, se pretende complementar mediante cálculos CFD la enseñanza en la Cátedra MFMF de la UTN/FRM en el tema específico de “Flujos Compresibles” en toberas convergentes y convergentes divergentes, tomando como referencia alguna de la bibliografía de asiduo uso en la Cátedra, ([Potter et al., 2001](#), [White F, 2004](#) y [Cengel et al., 2006](#)). Algunos detalles más específicos respecto a flujos compresibles se han tomado de [Thompson, 1972](#).

## 3 METODOLOGÍA DESARROLLADA

La metodología a seguir será la de complementar los ejemplos de aplicación de las formulaciones obtenidas para el análisis de flujo en toberas, con algunas simulaciones numéricas de esos mismos casos desarrollados como ejemplos de cálculo, que se realizan con el programa [ANSYS/Fluent v15](#).

Para poder interpretar los resultados obtenidos mediante CFD, es obvio que previamente el estudiante debe adquirir los conocimientos teóricos que le permitan llevar a cabo este análisis. Al llegar durante el dictado de la asignatura al tema “Flujos Compresibles”, como ya se indicó, el estudiante tiene ciertos conocimientos previos que le permiten aplicar los principios generales

de forma integral (TTR + Principios de Conservación) a este tipo de problemas. Se comienza con una introducción general, en donde se desarrollan las ecuaciones de conservación para estos casos, llegando a obtener un sistema de ecuaciones fundamentales, y se siguen con aplicaciones a: 1) conductos con variación de área (toberas) pero sin fricción y 2) conductos sin variación de área con fricción, o sin fricción, pero con adición de calor. Para ambos casos, las ecuaciones obtenidas en la introducción se corresponden por tanto a la obtención de formulaciones específicas para el caso de flujos compresibles, a saber (ver más detalles en [White, 2004](#)):

$$\text{Ecuación de continuidad: } \rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 = cte \quad (1)$$

$$\text{Cantidad de movimiento: } p_1 - p_2 = \rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2 \quad (2)$$

$$\text{Energía: } h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} = cte = h_0; \quad (3)$$

$$\text{Gas ideal: } \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = R = cte \quad (4)$$

$$\text{Gases, } C_p \text{ constante: } h = C_p T = \left( \frac{kR}{k-1} \right) T; \quad k = cte = 1,4 \text{ (aire)} \quad (5)$$

En donde:  $\rho_i$ , densidad;  $c_i$ , velocidad;  $A_i$ , área;  $p_i$ , presión estática;  $h_i$ , entalpía;  $T_i$ , temperatura;  $R$ , constante particular del gas;  $C_p$ , calor específico a presión constante;  $k$  relación de calores específicos,  $k = C_p / C_v$  ( $C_v$ , calos específico a volumen constante) subíndices 1, 2, estados cualesquiera del gas; 0, estado de remanso (i.e.,  $c_0=0$  m/s). Se supone el flujo como isentrópico, esto es, entropía constante.

Para gases ideales la ecuación de estado es  $\rho T = p / R$ , y siendo el flujo isentrópico, se tienen las siguientes relaciones para un gas perfecto, [Ec.6](#).

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k. \quad (6)$$

Cabe señalar que en el tema de Leyes de Semejanza, ya discutido previamente, el estudiante adquirió nociones del significado del número de Mach (Ma) como representación de la influencia que tiene sobre el flujo los efectos de su compresibilidad, siendo éste un parámetro importante para el estudio de problemas de gases a altas velocidades donde hay cambios significativos de presión, densidad y temperatura. Aquí se utilizan esas definiciones y se introducen nuevos detalles, e.g., diferentes formulaciones para este parámetro adimensional, [Ec.7](#) y las posibles clasificaciones de flujo en función del Ma.

$$Ma = \frac{c}{a}; \quad a = \sqrt{kRT} \quad (\text{velocidad de la onda sonora}) \quad (7)$$

Según el número de Ma el flujo obtiene distintas clasificaciones, para un  $Ma < 0,8$  el flujo es subsónico, para valores entre  $0,8 < Ma < 1,2$  el flujo es transónico ( $Ma = 1$ , flujo sónico), y para valores  $Ma > 1,2$  el flujo es supersónico.

Se procede luego a la adimensionalización de las propiedades relevantes del flujo, i.e.:  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$  y  $a$ , usando ciertas condiciones de referencia, denominadas condiciones de remanso de un fluido, notadas con el subíndice 0. Estas ecuaciones son deducidas a partir de las Ecs.1-5 y utilizando las Ec.6 y Ec.7, obteniendo así las relaciones adimensionales que permiten calcular el estado de remanso relacionando así cada propiedad del flujo en cualquier punto de la geometría en estudio con los valores de remanso. Esto permite definir las condiciones de borde en la entrada del dominio del cálculo de problema bajo estudio.

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2, \\ \frac{p_0}{p} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right]^{\frac{k}{k-1}}, \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right]^{\frac{1}{k-1}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Mediante técnicas de adimensionalización se definen también los valores de las propiedades denominados “críticos”, Ecs.9, relacionados con los valores de las propiedades en el punto sónico, i.e., cuando  $Ma=1$ . El punto sónico de cualquier tobera, se encuentra en la garganta (zona de menor sección), sin importar si ésta es convergente o convergente-divergente. Se pueden encontrar estas relaciones ya tabuladas, en función de ciertos valores de la constante  $k$  (e.g. en White 2004).

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}, \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}.\tag{9}$$

Las formulaciones reseñadas son la base del estudio para toberas, que es la primera aplicación de estos desarrollos, que se hace a efectos de mostrar al estudiante que el flujo compresible no es “intuitivo”, esto es, disminuciones de áreas no se corresponden siempre con aumentos de velocidades y disminuciones de presión, efecto que si se observa casos de flujo incompresible. La primera aplicación que se hace de estas formulaciones es la deducción de una expresión útil para el caso de toberas. Se relacionan así variaciones de áreas con las presiones y las velocidades para el caso de flujo compresible, en donde las variaciones de las propiedades queden explícitamente en relación con el Ma. La Ec.10 es la expresión obtenida y es fundamental para comprender el comportamiento que tendrá el fluido con respecto a la elección de la geometría sobre la que se hará el cálculo. En esta expresión, se explicita el efecto que tiene el Ma, siendo éste el valor más sensible, que puede cambiar totalmente las propiedades del flujo estudiado. En la bibliografía se puede encontrar o bien la Ec.10 tabulada para distintos valores del Ma para aire ( $k=1,4$ ), o bien expresiones alternativas aproximadas, más sencillas de usar, (White 2004).

Se deduce una expresión para la relación de áreas, [Ec.10](#), partiendo de la ecuación de continuidad, [Ec.1](#), e igualando el flujo másico de una sección cualquiera de la tobera, con el flujo másico en condiciones sónicas. Se indican estas propiedades (flujo sónico) con un asterisco (\*) como superíndice.

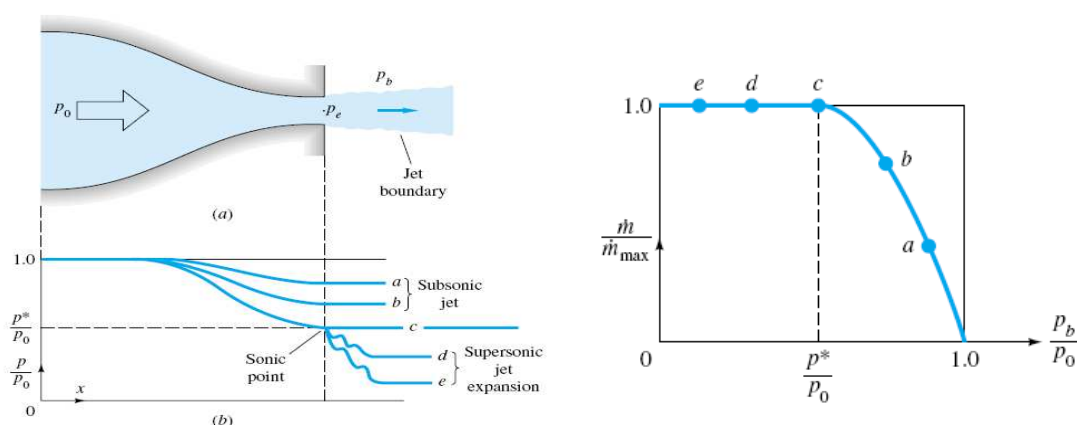
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)\text{Ma}^2}{\frac{1}{2}(k-1)} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (10)$$

Finalmente, durante el desarrollo del tema “Flujo compresible en toberas”, se analiza el fenómeno de “bloqueo del flujo”. Aquí se le explica al estudiante que, para variaciones en la entrada de la tobera, manteniendo constante las condiciones de su salida, o bien para una presión de remanso fija (entrada) y cambiando las condiciones de presión estática en la salida; en el área crítica o sónica (i.e. su garganta), se obtiene el bloqueo del flujo. Esto ocurre para una cierta condición de operación, dando el mayor valor de flujo másico posible en la tobera. Puede observarse que el flujo másico  $\dot{m}$  se va incrementando hasta un cierto valor máximo que es el correspondiente al de las condiciones críticas,  $\dot{m}^* = \dot{m}_{\text{máx}}$ . Una vez alcanzado este valor, por más que se varíen las condiciones de operación, el flujo másico no seguirá aumentando. La expresión para obtener el flujo másico máximo está dada por la [Ec. 11](#):

$$\dot{m}_{\text{máx}} = 0,6847 \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \quad (11)$$

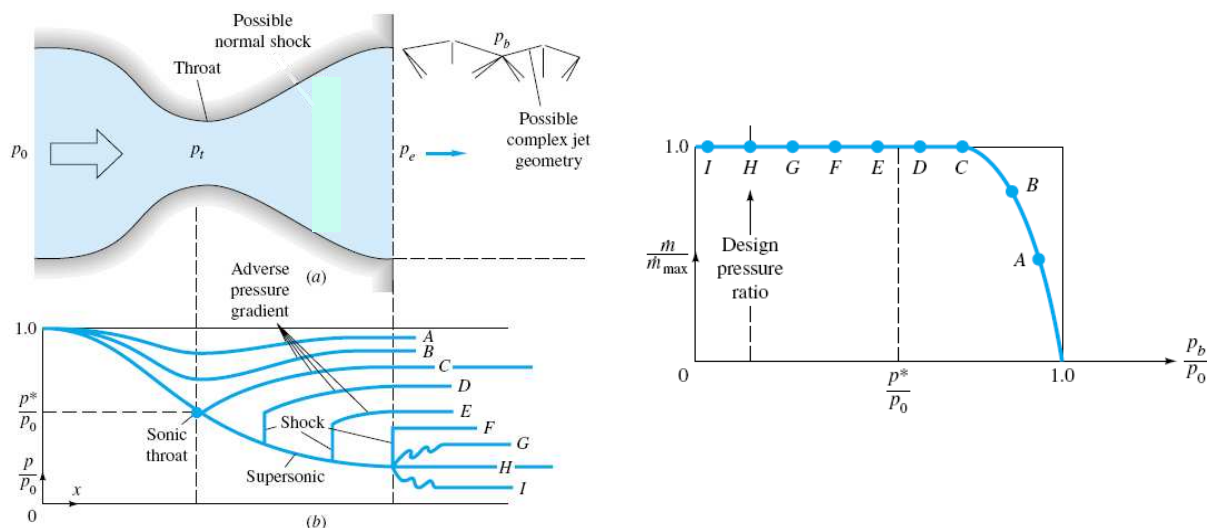
Como ya se señaló, el flujo másico máximo está dado por la [Ec. 12](#). El último término en el desarrollo mostrado puede graficarse para demostrar que, aunque se aumente la diferencia de presiones entre el valor de remanso y el de salida, el flujo másico llegará a su máximo,  $\dot{m}_{\text{máx}}$  manteniéndose constante y provocando el fenómeno de bloqueo. Esta curva será de gran importancia para este trabajo, ya que será en la que se usa para demostrar la validez de los cálculos realizados mediante la CFD. El adecuado ajuste de la curva de la figura mediante CFD servirá como una introducción a las estrategias de como “validarse como usuario” de un código CFD cuando se comienza con el uso de estas herramientas de simulación, las que sin una manipulación adecuada pasan a entregar lo que en la jerga de los usuarios de CFD se denomina “Color Fluids Dynamic” en vez de “Computational Fluid Dynamic”, ya que las imágenes obtenidas poseen un color que les da gran espectacularidad, pero sin ningún significado físico, lo que conduce muchas veces a interpretaciones erróneas de resultados a un usuario inexperto que se “olvide” de los principios físicos fundamentales que rigen el fenómeno que se está modelando. Las expresiones desarrolladas también son válidas para el caso de toberas convergentes-divergentes, con la diferencia es que la onda de choque normal que se forma en la garganta para el caso de toberas convergentes, ahora se va desplazando desde la garganta hacia la salida de la tobera para de alguna manera “compensar” los valores que deben tenerse a la salida y los valores “locales” de las propiedades, siendo este un efecto que limita de algún modo la teoría de “medios continuos” en donde siempre se ha propuesto variaciones suaves de las propiedades en el dominio de cálculo. Este efecto es el que distingue claramente los casos de flujo compresible, siendo de gran interés por sus características intrínsecas (discontinuidad de primer orden en las propiedades estudiadas, i.e., cambio brusco de valores, pero con un salto finito a los lados de la onda de choque).





**Figura 1.** Tobera convergente. **Izq.:** Geometría y variación de la presión estática  $p$  a lo largo de su eje. **Der:** Variación del flujo másico en función de la presión estática definida a la salida  $p_b$  para ciertas condiciones de presión de remanso  $p_0$ , en la entrada que se mantienen constantes, extraído de White 2004. **Notación:**  $a, b, c, d, e$ : puntos en donde se han definido diferentes valores de  $p_b$ ;  $p_e$ : presión estática en la salida,  $p_b$ : presión estática del entorno en la salida.

Las ondas de choque normales tienen ciertas particularidades como la de ser claramente un fenómeno del tipo irreversible y el ser muy delgadas, con espesores del orden de las micras, lo que conlleva la tendencia a comportarse como discontinuidades dentro del flujo del fluido. Estas características propias de las ondas de choque junto con las propias de flujos compresibles hacen que los flujos supersónicos tengan un comportamiento completamente diferente al del flujo incompresible.



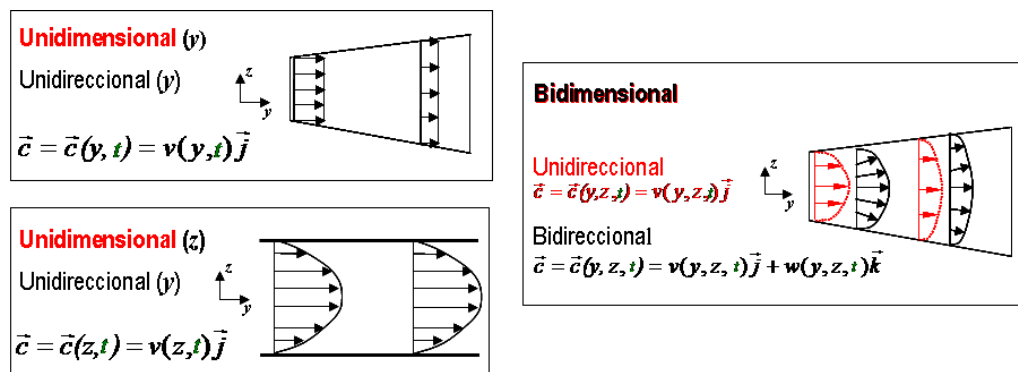
**Figura 2.** Tobera convergente-divergente. **Izq.:** Geometría y variación de la presión estática  $p$  a lo largo de su eje. **Der:** Variación del flujo másico en función de la presión estática definida a la salida  $p_b$  para ciertas condiciones de presión de remanso  $p_0$ , en la entrada que se mantienen constantes, extraído de White 2004. **Notación:**  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ : puntos en donde se han definido diferentes valores de  $p_b$ ;  $p_e$ : presión estática en la salida,  $p_b$ : presión estática del entorno en la salida

A los efectos de poder comprender los que sucede en una tobera convergente-divergente, deben darse más detalles relacionados con la aparición de ondas de choque. Existen dos tipos de éstas: normales y oblicuas, pero visualizaremos el comportamiento de la primera, ya que es la que se manifiesta dentro del ejercicio planteado.

Cabe destacar, que es posible el cálculo de  $\dot{m}$  en condiciones de no bloqueo tanto en toberas convergentes, como convergentes-divergentes, mediante la Ec. 12, expresión de utilidad para evaluar el flujo másico en función de las condiciones locales de flujo, esto es valores de área  $A$  y la presión  $p$  en una cierta posición  $x$  en el eje de la tobera, ver detalles en White 2004.

$$\frac{\dot{m}}{A} \frac{\sqrt{RT_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{2k}{(k-1)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad (12)$$

Por último, se indica que, pese a que las simulaciones CFD complementarias de los ejercicios de gabinete que se discuten en el parágrafo de resultados, se han realizado considerando al flujo ideal (no viscoso), no puede evitarse la simulación axi-simétrica del dominio de cálculo, la que es intrínsecamente 2D. Luego, podrá observarse que en las toberas simuladas el fluido se comporta como 2D, teniendo una componente axial y otra radial, lo que produce una cierta curvatura de la onda de choque, apartándose del concepto de onda de choque normal, que es intrínsecamente un modelo 1D. Si la simulación se hace considerando flujo viscoso, además de tener la velocidad tanto componentes axiales como radiales, la componente axial posee un perfil de velocidades, esto es, una variación de su magnitud en la dirección radial, Fig. 3, afectando aún más la forma de la onda, que evidentemente no será plana. Pese a estas observaciones, podrá verse que los resultados obtenidos mediante CFD en términos de valores medios, se corresponden bien a los obtenidos mediante el uso de la teoría analítica, que es intrínsecamente 1D.



**Figura 3.** Clasificación de flujos: **Izq., arriba:** Usado en teoría flujo compresible 1D. **Izq., abajo** 1D desarrollado, típico de flujo en tuberías. **Derecha:** flujos 2D, similar al adoptado para CFD (2D, bidireccional). Adaptado de Gerhart et al., 1995 y Thompson 1972.

Nótese que, en referencia a los detalles de unidimensionalidad (1D) o bidimensionalidad, frecuentemente se omite la sutil diferencia entre direccionalidad y dimensionalidad, siendo la primera el número de componentes no nulas de la función vectorial que están presentes en el campo de la función, (que pueden variar entre 1 y 3) y siendo la segunda el número de coordenadas espaciales independientes necesarias para especificar la propiedad (que pueden



variar entre 0 y 3). La dimensionalidad determina si las ecuaciones a resolverse son ecuaciones diferenciales ordinarias (unidimensionales) o parciales (bi- o tridimensionales). La direccionalidad determina el número de ecuaciones que deben resolverse. La distinción entre dimensionalidad y direccionalidad rara vez se hace clara y la clasificación dimensionalidad se usa para captar ambas ideas (Gerhart et al., 1995).

#### 4 RESULTADOS

Se simularán dos casos: una tobera convergente y una tobera convergente-divergente. Como primer paso se compararán para ambas toberas los resultados obtenidos mediante CFD contra los resultados analíticos obtenidos de dos ejercicios que la Cátedra propone para que los estudiantes los resuelvan a partir de la teoría desarrollada para flujo compresible unidimensional, ya descripta anteriormente. Como trabajo adicional, y con el objeto de aumentar la motivación del estudiante, luego se variarán las condiciones de operación de las toberas para proceder a una visualización del flujo más detallada en su interior y reproducir el fenómeno de bloqueo comparando los resultados de la teoría para esos casos, ver Fig. 1 y Fig. 2, con los obtenidos mediante CFD.

Para ambas toberas se considera al fluido (aire) como gas ideal, no viscoso. Las geometrías se definen como 2D axi-simétricas de paredes lisas. Para definir las condiciones de borde se calcularán los valores de remanso para la entrada a la tobera y se mantendrán constantes. En la salida de la tobera se define una presión estática constante, siendo ambos valores idénticos a los de los enunciados de los ejercicios de gabinete planteados por la Cátedra (no mostrados, ver más enunciados/detalles de resolución teórica en Ejemplos 9.4, 9.5, 9.6, 9.8 y 9.9 de White 2004).

Como ya indicó, y a efectos de mostrar las capacidades de análisis que la CFD posee, se variarán los valores de presión estática definidos a la salida, para así observar los distintos fenómenos relacionados con la formación de ondas de choque normales y su comportamiento cuando se produce la variación de este parámetro. Los resultados obtenidos se post-procesarán mediante las herramientas de visualización de flujos que los códigos de CFD comerciales poseen para así ofrecer al estudiante una completa representación de los campos de presión y velocidades en toda la tobera, los que no pueden visualizarse a partir de los resultados obtenidos de forma analítica.

A continuación, se hará una comparación de los resultados obtenidos analíticamente en la ejercitación propuesta al estudiante con los provenientes de la simulación, acompañada de sus respectivos gráficos, tanto para la tobera convergente como para la tobera convergente-divergente. Los resultados de la simulación computacional se muestran en las Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 y Fig. 8.

Durante el desarrollo del Tema “Flujos Compresibles”, en el dictado de la Cátedra se introducen/utilizan ciertos conceptos específicos a saber: Número de Mach ( $Ma$ ), flujo subsónico y supersónico y relaciones termodinámicas para las variaciones de densidad, presión y temperatura, a su vez relacionadas con las variaciones de velocidad en flujos confinados. Se sigue luego con aplicaciones a conductos de sección circular con variación de área, i.e., toberas convergentes y convergentes-divergentes.

Para poder introducirse en el tema a desarrollar, el estudiante debe poseer los conceptos de Análisis Integral de Flujos (teoría de volumen de control, i.e., Teorema de Transporte de Reynolds, TTR) y de los Principios de Conservación de Masa, Cantidad de Movimiento y Energía, formulados de forma integral mediante el uso del TTR. También el estudiante debe poseer conocimientos de Análisis Dimensional y Leyes de Semejanza para fluidos.

Como complemento de los desarrollos teóricos discutidos en el dictado de la asignatura relacionados con flujos compresibles, en donde además, se resuelven ejercicios de flujo en

toberas mediante soluciones analíticas, y además se desarrollará un trabajo complementario en donde se obtendrán resultados por medio de la CFD de los mismos ejercicios, contrastando ambas soluciones. Se comentará/compararán además la diferencia en el tiempo invertido en la resolución de los problemas y la capacidad de visualizar el flujo en el interior de la tobera, cosa que la solución analítica no permite de manera inmediata. También, la solución obtenida mediante CFD se contrastará con tablas y gráficos extraídos en la bibliografía de apoyo, (e.g, [White F, 2004](#)), con el objetivo de introducir al estudiante en cómo se procede a “validarse” como usuario de un código de CFD e introducirlo en tareas relacionadas a la validación/calibración de un código determinado de CFD a efectos de ser crítico con las soluciones obtenidas mediante CFD.

### **Resultados obtenidos para tobera convergente:**

En el enunciado del ejercicio propuesto, Ejemplo 9.8 de [White 2004](#) (no mostrado) se dan detalles de una tobera convergente con un área determinada, por donde circula un fluido (aire), con las siguientes propiedades de remanso, ver [Tabla 1](#) a las que se le definirá un valor de presión estática en la salida, compatible con el enunciado del ejercicio y al cual luego se le variará, para obtener distintos valores representativos, como detalle complementario de la ejercitación y así observar los distintos fenómenos producidos en el interior de la tobera, relacionados con la compresibilidad del flujo.

**Tabla 1.** Dimensiones de la tobera convergente, valores de remanso (entrada) y presión definida en la salida. El valor correspondiente al caso (c) se corresponde con el del enunciado del ejercicio, ver [Fig. 1](#).

	<i>Variable</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
Área de Garganta	$A^*$	$6 \times 10^{-4}$	$\text{m}^2$
Presión de Remanso	$p_0$	120	KPa
Presión de Salida (a)	$p_b$	101,3	KPa
Presión de Salida (b)	$p_b$	90,0	KPa
Presión de Salida (c)	$p_b$	63,4	KPa
Presión de Salida (d)	$p_b$	50,0	KPa
Presión de Salida (e)	$p_b$	30,0	KPa

Los resultados analíticos obtenidos tras la resolución del ejercicio mediante las ecuaciones presentadas anteriormente se muestran en la [Tabla 2](#). Los valores resultantes para el número de Ma y para el flujo másico usando distintos valores de presiones de salida  $p_b$  a efectos de compararlos con la curva de la [Fig. 1](#) se presentan en la [Tabla 4](#).

**Tabla 2.** Resultados obtenidos mediante solución analítica para los valores críticos (sónicos)

	<i>Índice</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
Presión Crítica	$p^*$	63,4	KPa
Temperatura Crítica	$T^*$	333,33	K
Densidad Crítica	$\rho^*$	0,6624	$\text{kg/m}^3$

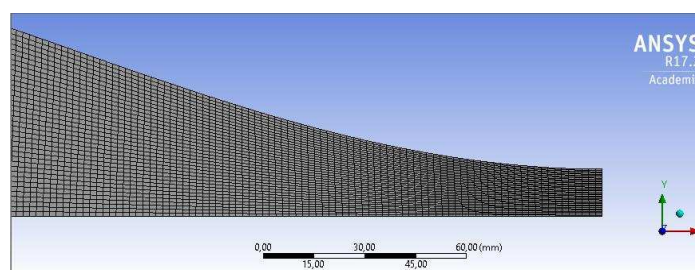
Pese a que no es un objetivo principal en este trabajo, como se sabe que es típico de la metodología CFD el analizar la calidad de los resultados obtenidos en función del tamaño de las celdas de la malla definida, y que se requieren de al menos tres mallas con diferente tamaño de celda para el análisis de resultados. Se comienza realizando las simulaciones con dos mallas del tipo estructuradas, con celdas de tamaño homogéneo en cada una de ellas. La primera malla

consta de elementos cuadriláteros de 3mm en su lado más largo, y luego se definió otra con elementos cuadriláteros de 1mm en su lado más largo.

**Tabla 3.** Resultados obtenidos mediante solución analítica, para el número de Ma y  $\dot{m}$  (de las Ec.8, para  $k=1,4$ ) usando distintos valores de presiones de salida,  $p_b$ . El caso (b) se corresponde al enunciado del ejercicio propuesto y el caso (c) es en donde se obtiene la condición de flujo sónico con bloqueo. Los casos (a), (b), (c), (d) y (e) se corresponden con los puntos 1 a 5 de la Fig. 5.

	<u>Número de Ma</u>	<u><math>\dot{m}</math></u>
(a)	0,497	0,1082 kg/s
(b)	0,654	0,1290 kg/s
(c)	1,000	0,1455 kg/s
(d)	1,200	0,1455 kg/s
(e)	1,558	0,1455 kg/s

El alto de cada elemento se disminuyó en la misma proporción. Al comparar la calidad de los resultados en ambos casos se observó que, basándose en una variable media representativa como lo es el flujo másico, se obtuvo una diferencia menor al 1% en ambas simulaciones. Como los costos computacionales son relativamente modestos para estas dos mallas, pese a que la malla más gruesa ofrecía casi igual calidad de resultados, se decidió utilizar el mallado más denso, ver Fig. 4, asumiendo que ya no era necesario reducirlo aún más por el escaso margen de error hallado entre las dos mallas. A continuación, se muestra el mallado utilizado.



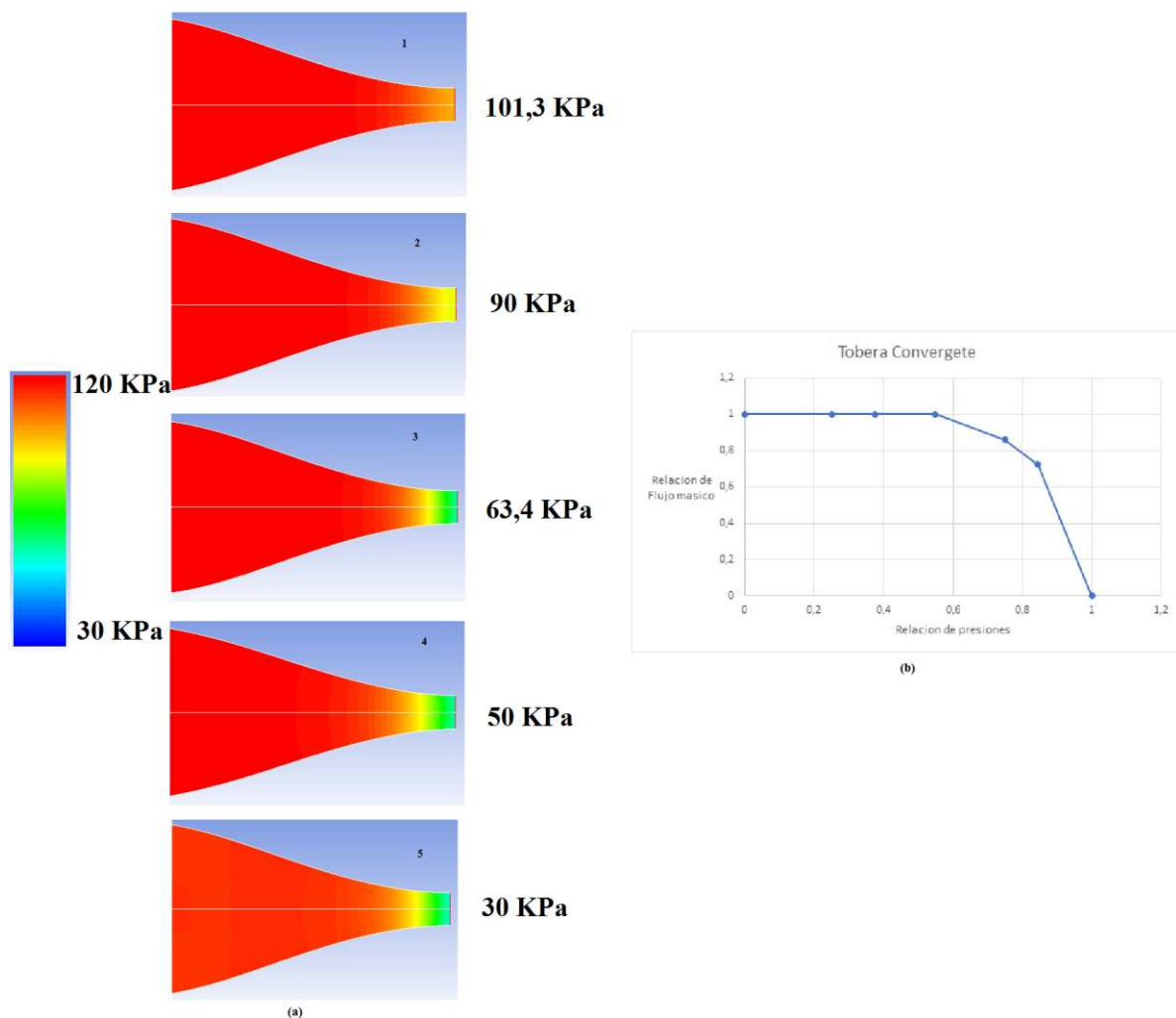
**Figura 4.** Detalle del mallado para CFD de la tobera convergente

Con la malla ya definida se calcularon resultados CFD para poder obtener valores representativos como presión, densidad, temperatura, velocidad y el número de Ma. Como se usa la ecuación de la energía y la temperatura está acoplada en el sistema de ecuaciones se probó el uso de formulaciones implícitas y explícitas para los esquemas numéricos, no observándose grandes diferencias en los resultados obtenidos. A partir de estos valores se calculó el flujo másico, que es el que se comparará con la solución analítica obtenida y se utilizó este último valor para confeccionar la curva entre relaciones de áreas y relaciones de flujos másicos, ver Fig. 5.

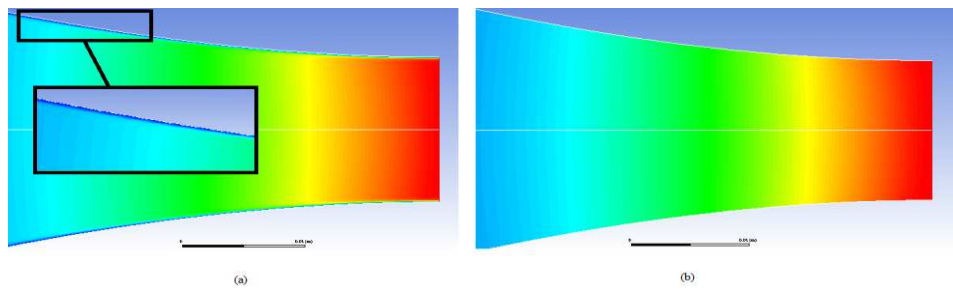
La comparación de los resultados obtenidos por CFD contra los calculados obtenidos analíticamente para el flujo másico es correcto para todos los casos planteados, ver Fig. 5. Se cumple así con uno de los objetivos propuestos de una manera adecuada, que es la de enseñar al estudiante que se obtiene idéntica solución que la analítica y además se posee una riqueza en la interpretación de los resultados gracias a CFD ya que es posible ver como la onda de choque se va formando en la salida de la tobera a medida que baja la presión hasta llegar a la condición de bloqueo. Es claro que el punto 3 (equivalente al punto (c) de la Tabla 3) es en donde se produce la condición de bloqueo sónico, formándose la onda de choque en la salida de la tobera.

Disminuyendo más aún la presión de salida se ve que la tobera sigue entregando el mismo flujo másico, manteniéndose bloqueada, puntos 4 y 5 de la curva.

Luego del análisis de las posibilidades de representación gráfica que ofrece el post-proceso de los resultados obtenidos mediante CFD, se le remarca al estudiante que el tiempo invertido en la simulación es similar al de los cálculos teóricos si se dispone de una computadora del tipo notebook y que la posibilidad de un análisis más profundo de este tipo de flujos es posible sin un gran equipamiento informático. Finalmente, en la Fig. 6 puede verse una simulación de flujo real (viscoso) 2D en donde puede apreciarse la capa límite que se forma en la pared, mostrando, así como puede acercarse a la solución del flujo real y compararla con la de flujo ideal.



**Figura 5.** Tobera Convergente. (a): Campo de presión estática para distintas presiones de salida,  $p_b$ , manteniendo la presión de remanso  $p_0$ , en la entrada constante. (b): Comparación del  $\dot{m}$  en función de  $p_b$  para  $p_0 = \text{cte}$ . Notación: Línea: curva teórica; puntos 1-5: resultados CFD.



**Figura 6.** Caso tobera convergente: Detalle de la zona de la garganta donde se comparan campos de velocidades entre resultados CFD usando: 1. Fluido real, modelo viscoso (a). 2. Fluido ideal (b), con visualización de la capa límite. En el cuadro se muestra el detalle de la capa límite capturada con el modelo viscoso que no puede observarse en la imagen de la derecha.

### **Resultados obtenidos para tobera convergente-divergente:**

En el enunciado del ejercicio propuesto, Ejemplo 9.9 de [White 2004](#) (no mostrado) se dan detalles de una tobera convergente-divergente con un área determinada, por donde circula un fluido (aire), con las siguientes propiedades de remanso, ver [Tabla 4](#) a las que se le definirá un valor de presión estática en la salida compatible con el enunciado del ejercicio y al luego se le variará, para obtener distintos valores representativos, como detalle complementario de la ejercitación y así observar los distintos fenómenos producidos en el interior de la tobera, relacionados con la compresibilidad del flujo.

Se utilizó una malla de similares características a la de la tobera convergente en cuanto a tamaño de celda y configuración (malla estructurada). Se definieron condiciones de borde similares a las definidas para el modelo de cálculo de la tobera convergente, respetando los valores numéricos relacionados con el Ejemplo 9.9.

Los resultados analíticos obtenidos tras la resolución del ejercicio mediante las ecuaciones presentadas anteriormente se muestran en la [Tabla 5](#). Los resultados obtenidos para el número de Ma y para el flujo másico usando distintos valores de presiones de salida  $p_b$  a efectos de compararlos con la curva de la [Fig. 2](#) se calcularon de forma similar a los presentados en la [Tabla 3](#) para la tobera convergente y los resultados obtenidos mediante CFD son idénticos a los obtenidos mediante el cálculo analítico.

**Tabla 4.** Dimensiones de la tobera convergente-divergente, valores de remanso (entrada), área crítica y presión definida en la salida.

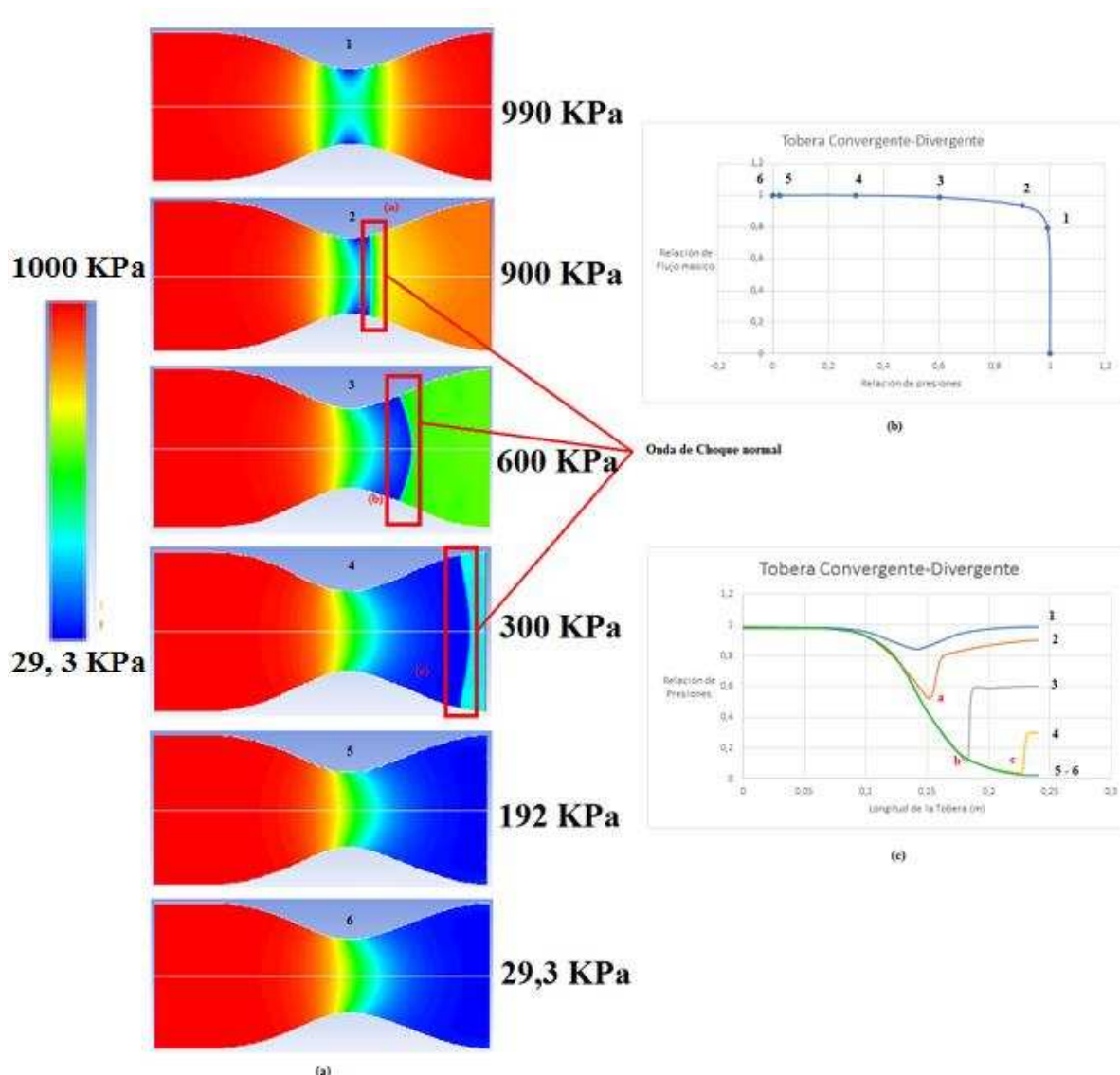
	<i>Variable</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
Área de Garganta	$A^*$	$2 \times 10^{-3}$	m <sup>2</sup>
Área de salida	$A_s$	$8 \times 10^{-3}$	m <sup>2</sup>
Presión de Remanso	$p_0$	1000	KPa
Temperatura de remanso	$T_0$	500	K
Presión de Salida (a)	$p_b$	990	KPa
Presión de Salida (b)	$p_b$	900	KPa
Presión de Salida (c)	$p_b$	600	KPa
Presión de Salida (d)	$p_b$	300	KPa
Presión de Salida (e)	$p_b$	29,3	KPa

**Nota:** Los valores de los casos (b) y (e) se corresponden con el del enunciado del ejercicio, ver [Fig. 7](#).

Se recalca nuevamente que es imposible la visualización de la migración de la onda de choque desde la garganta de la tobera hasta su salida, cosa que si es posible mediante la visualización de los campos de presiones. Note que, pese a que se ha simulado un flujo ideal, la forma de la onda de choques no es normal (i.e., plana, 1D), sino que tiene una forma curva que discrepa con la ideal, siendo el motivo de esta discrepancia el que ya se describió en el apartado anterior, ver Fig. 3.

**Tabla 5.** Resultados obtenidos mediante el cálculo analítico.

	<i>Índice</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
Número de Ma (condic. diseño)	$Ma_d$	2.95	Adimensional
Presión de salida (condic. diseño)	$p_{sd}$	29,3	KPa
Flujo másico (condic. diseño)	$\dot{m}$	3,61	kg/s



**Figura 7.** Tobera Convergente-divergente. (a): campo de presión estática para distintas presiones de salida,  $p_b$ , manteniendo la presión de remanso  $p_0$ , en la entrada constante. (b): comparación del  $\dot{m}$  en función de  $p_b$  para  $p_0 = \text{cte}$ . (c): variación de las presiones a lo largo del eje de la tobera. Notación: Línea: curva teórica; puntos 1-5: resultados CFD.



Puede observarse que, a partir de una cierta diferencia de presiones entre la entrada y la salida de la tobera, aparece una onda de choque normal. Se visualiza el desplazamiento de la misma hacia la salida a medida que se imponen menores valores para la presión a su salida.

El ajuste que se observa del flujo másico puede verse que es correcto para todos los casos planteados, ver curva Fig. 7(c). Se cumple así con otro de los objetivos propuestos de una manera adecuada, que es la de enseñar al estudiante que se obtiene idéntica solución que la analítica para este caso de diferente geometría que el anterior y además aquí también se posee una riqueza en la interpretación de los resultados gracias a CFD ya que es posible ver como la onda de choque se forma a medida que baja la presión hasta llegar a la condición de bloqueo. Esta onda luego se desplaza hacia la salida de la tobera a medida que la presión disminuye. En los casos 3 y 4 de la Fig. 7(c) no es posible el cálculo del flujo másico, ya que la expresión de cálculo de éste, Ec. 12 es válido sólo hasta la condición de bloqueo. El cálculo analítico del flujo másico para este caso, añade dificultad, mientras que es indiferente para la simulación CFD, ya que la condición de bloqueo no es una limitante. Es claro que el punto 3 es en donde se produce la condición de bloqueo sónico, formándose la onda de choque en la garganta de la tobera. Disminuyendo más aún la presión de salida se ve que la tobera sigue entregando el mismo flujo másico, manteniéndose bloqueada, puntos 4, 5 y 6 de la curva, siendo este último punto el que se usa para el cálculo de la condición de diseño de la tobera que es cuando la onda de choque abandona la salida de la misma.

Finalmente, y a modo de elemento motivante para el estudiante, se realizó la simulación de flujo viscoso en este caso para obtener el patrón de flujo en este caso, ver Fig. 8, en donde se evidencian más claramente los efectos de posibles desprendimientos de capa límite (separate jet boundary layer) y flujo reverso (entrained flow), poniendo de relieve la complejidad del flujo que puede observarse en toberas convergentes-divergentes, tal como se expone ya en textos avanzados, específicos para el flujo compresible, e.g., Thompson 1972.

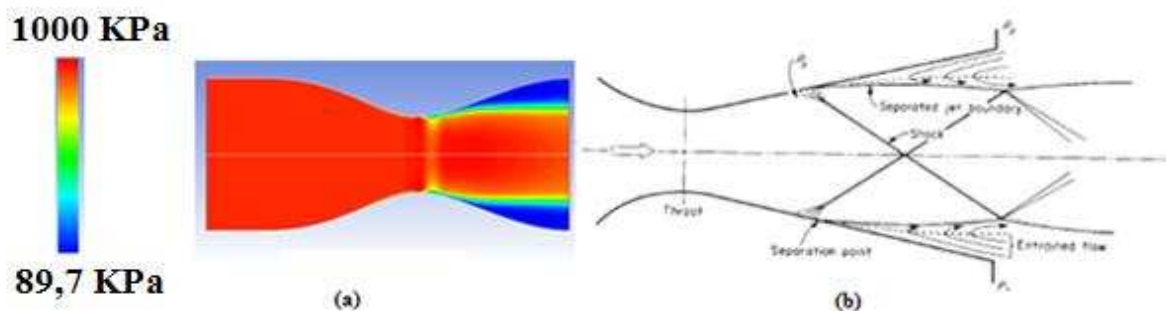


Figura 8. (a): Resultados CFD para la presión total,  $P_b = 900$  KPa; (b) según Thompson 1972.

## 5 CONCLUSIONES

Mediante el uso de la CFD se han podido obtener soluciones para el campo de velocidades y presiones para dos tipos de toberas, una convergente y otra convergente-divergente, comparando las soluciones obtenidas contra sus contrapartes analíticas y viendo una buena concordancia entre ambas soluciones como era de esperarse.

La posibilidad de visualizar los campos de velocidades y presiones en forma detallada mediante las herramientas de post-proceso permite visualizar el comportamiento del flujo dentro de la tobera y analizar la evolución de la onda de choque que aparece, así como observar

el fenómeno de bloqueo que se produce.

Para el caso de toberas convergentes-divergentes se muestran los efectos tanto viscosos como no 1D que el flujo real impone en la conformación de la onda de choque que ya no es plana como indica la teoría que es 1D. Pese a que la simulación sigue siendo de flujo ideal pero 2D, ya se observan discrepancias en la forma de la onda, mostrando al estudiante la complejidad que posee un flujo de un fluido real, ya que se puede comparar las distintas formulaciones teóricas que se acercan más o menos a la fenomenología real del flujo y ver sus efectos mediante la visualización de ellos sobre el flujo. La visualización posterior de un caso de flujo axi-simétrico y viscoso aumenta más la percepción de la complejidad aparejada con el modelado de flujos reales, aunque sea 2D, siendo esto una antesala de la discusión de modelos reales 3D de flujos turbulentos a altos números de Mach.

Se cree que mediante estos ejemplos se puede hacer una introducción más “amistosa” de la CFD a los estudiantes que cursan la asignatura Mecánica de Fluidos y Máquinas Fluidodinámicas, motivando así su uso en el ámbito de la ingeniería.

## 6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) dentro de su propio programa de I+D+i (UTN/SCTyP). Los autores desean agradecer a la UTN por proveer soporte financiero para este trabajo enmarcado en los proyectos de investigación y mejora de la enseñanza en ingeniería, proyectos UTI3504TC y UTI3543TC.

## REFERENCIAS

- ANSYS Inc., ‘ANSYS/FLUENT Soft.,’ <http://www.ansys.com/Industries/Academic/Tools/>, 2015.
- Cengel Y, Cimbala, J, *Mecánica de Fluidos, Fundamentos y Aplicaciones*, McGraw-Hill. 1<sup>era</sup> edición, 2006.
- Gerhart P, Gross R, Hochstein J, *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1<sup>era</sup> edición, 1995
- López M, Mancuso F, Aguirre R, Henderson G y Coussirat M, *Uso de la Mecánica de Fluidos computacionales como apoyo a la enseñanza de la mecánica de los fluidos en la universidad*, Mecánica Computacional Vol. XXXIV, págs. 1597-1616, 2016.
- Potter M, Wiggert D, *Mecánica de Fluidos*, Thomson. 3<sup>era</sup> edición, 2001.
- Stramaná A, Panella L, Coussirat M, Gandolfo E, “Uso de herramientas CFD como apoyo al aprendizaje de la mecánica de los fluidos en la universidad”, Mecánica Computacional Vol. XXXIII, págs. 2127-2141, 2014.
- Thompson P., *Compressible-Fluid Dynamics*, Mc Graw Hill, 1<sup>era</sup> edición, 1972.
- White F, “*Mecánica de Fluidos*”, Mc Graw Hill, 5ta edición, 2004.